8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. szeptember 22.

Villam01 Számítsuk ki fejben:
a) $97 \cdot 615 + 615 \cdot 3$, **b)** $398 + 2351 + 2$,
c) $4 \cdot 376 \cdot 25$, **d)** $329 + 615 - 5017 - 327 + 1236 - 614 + 5019$
e) Fogalmazzuk meg azokat az azonosságokat, amelyekre az előző feladat megoldásához szükség volt!

Villam02 Melyik a nagyobb? Számoljunk fejben!
a) $x = 5000 - (3000 - 45)$ vagy $y = 5000 - (3000 - 46)$?
b) $u = 5000 - (3000 + 45)$ vagy $v = 5000 - (3000 + 46)$?

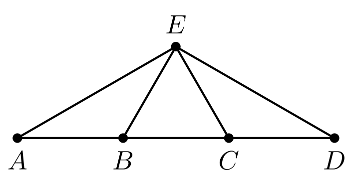
Kom01. Hányféleképpen juthatunk A-ból B-be az alábbi ábrán, ha mindig közelítünk B-hez?

Kom02. Egy dobozban négy számkártya van, rajtuk egy-egy szám, nevezetesen az 1, a 2, a 3 és a 4. Kihúzunk egy kártyát és felírjuk a rajta látható számot. Ezután
a) visszatesszük, **b)** nem tesszük vissza
a kihúzott kártyát a többi közé és újra húzunk. Az ezen látható számot az első mellé jobbra írjuk. Hányféle kétjegyű számot kaphatunk így?

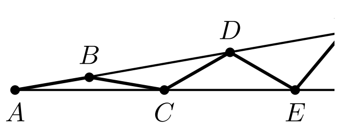
Lov01. Egy szigeten jártunk, ahol lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.
Egy fa árnyékában két bennszülött pihent. Megkérdeztük az egyiket:
- Ön lovag vagy lókötő?
A: - ... Válaszát sajnos nem értettük, így megkérdeztük a másikat, hogy mit mondhatott a társa.
B: - A azt mondta, hogy ő lókötő.
Mi lehet A illetve B?

Lov02. Lovagok és lókötők szigete. (Lásd a Lov01. feladatot!)
A szigetnek 100 lakosa és három felekezete van: a *Napimádók*, a *Holdimádók* és a *Földimádók*. Minden lakos pontosan egy felekezethez tartozik. Egy felmérés alkalmával minden lakosnak meg kellett válaszolnia a következő három kérdés mindegyikét: „Te Napimádó vagy?", „Te Holdimádó vagy?", „Te Földimádó vagy?". Az első kérdésre 60, a másodikra 40, a harmadikra 30 „igen" válasz érkezett. Hány lovag és hány lókötő él a szigeten?

Szog01. Az alábbi ábrán az AB, BC, CD, BE és EC szakaszok mind egyenlő hosszúak. Mekkora az $AED\angle$?



Szog02.
Egy 10°-os szög szárai közé, a szög A csúcsából indulva berajzoltuk az $ABCDEF$ töröttvonalat, amelynek mindegyik oldala 1 cm (lásd a **??**. ábrát).



a) Mekkora az $AEF\angle$?
b) Meddig lehet folytatni a töröttvonalat?
c) És ha nem 1 cm-rel lépkedünk?

Alg01 Számítsuk ki minél egyszerűbben! Írjuk le, mi segít a számításban!

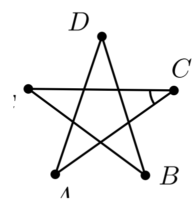
a) $17\,530 \cdot 17\,533 - 17\,531^2$ **b)** $17\,531 \cdot 17\,534 - 17\,532^2$

c) $17\,532 \cdot 17\,535 - 17\,533^2$ **d)** $56\,384 \cdot 56\,387 - 56\,385^2$

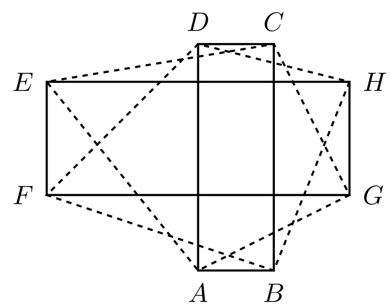
Beadható feladatsor
1. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea01. Ketten lovagolnak egy körpályán. Ha szemben haladnak, akkor ötször olyan sűrűn találkoznak, mintha egy irányban haladnának.
Határozzuk meg a lovasok sebességének arányát!

Bea01. Mekkorák a szabályos hurkolt ötszög szögei?



Bea03. Az ábrán látható $ABCD$ és $EFGH$ téglalapok oldalai páronként merőlegesek egymásra. Melyik nagyobb: az $AGCE$ vagy az $BHDF$ négyszög területe?



Bea04. Adjuk meg az összes a prímszámot, melyre $a + 4$ és $a + 14$ is prím!

Bea05.
a) Hány ötjegyű szám van?
b) Hány olyan van közöttük, amelyben van 9-es számjegy?
c) Hány olyan van közöttük, amelyben van 8-as és 9-es számjegy is?

Beadási határidő: október 6. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. szeptember 29.

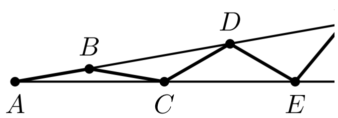
Ez a szakkör rövid volt, mert 16.00-kor Simonyi Gábor „Információközlés és gráfelmélet” című előadása kezdődött.

Villam03 Állapítsuk meg fejben, hogy $63 \cdot 936$ harmada az alábbi számok közül melyikkel egyenlő!
$21 \cdot 312$, $63 \cdot 312$, $21 \cdot 936$

Villam04 Adott három törtszám. Az első és a második szorzata 60,9 az első és a harmadik szorzata pedig 113,1. Mennyi az első számnak és a másik két szám összegének a szorzata?

Házi feladat volt

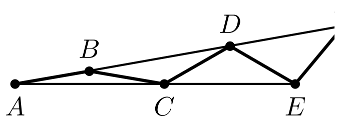
Szog02.
Egy $10°$-os szög szárai közé, a szög A csúcsából indulva berajzoltuk az $ABCDEF$ töröttvonalat, amelynek mindegyik oldala 1 cm (lásd az alábbi ábrát).



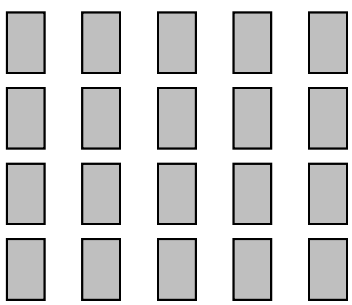
a) Mekkora az $AEF\angle$?
b) Meddig lehet folytatni a töröttvonalat?
c) És ha nem 1 cm-rel lépkedünk?

Órai feladatok

Kom03. Hányféleképpen juthatunk A-ból F-be az alábbi ábrán, ha mindig közelítünk F-hez?



Kom04. Öt betűkártyánk van:

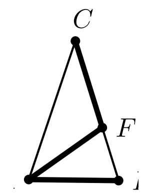


Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) rakható ki belőlük?

Lov03. Emil, János, Károly és Rudolf futballoztak az udvaron, és betörtek egy ablakot. Az eset kivizsgálásakor a következőket mondták:
Emil: – Az ablakot Károly vagy Rudolf törte be.
János: – Rudolf volt. Károly: – Nem én tettem.
Rudolf: – Én sem.
Tanáruk, aki jól ismerte a fiúkat, így szólt: – Hárman közülük mindig igazat mondanak. Ki törte be az ablakot?

Lov04. Lovagok és lókötők szigete. (Lásd a Lov01. feladatot!)
Ismét a lovagok és lókötők szigetén járunk. Két embert egyforma típusúnak nevezünk, ha vagy mindketten lovagok, vagy mindketten lókötők. A, B és C három szigeti lakos. A ezt mondja: „B és C egyforma típusú.” Valaki megkérdezi C-től: „Egyforma típusú A és B?” Mit válaszol?

Szog03.
Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögben a vastagon rajzolt szakaszok is egyenlőek. Mekkorák a háromszög szögei?



Szog04.
a) Az ABC egyenlő szárú háromszög BC szárán adott az M, az MC szakaszon pedig az N pont úgy, hogy $MN = AN$. Tudjuk, hogy a BAM és az NAC szögek egyenlőek. Határozzuk meg az $MAC\angle$ szög nagyságát!
b) Szerkesszünk az s) feladatrésznek megfelelő ábrát!

Alg02.
Az n változó mely egész értéke esetén lesz az $5(n + 2) - 3(1 - 3n)$ kifejezés értéke prímszám?

Alg03.
Négy szomszédos páratlan szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 12-t kaptunk. Mi volt a négy szám?

Emlékeztető: Múlt héten a szakkörösök kaptak egy beadható feladatsort is. Lásd a múlt heti szakkör anyagát a

http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/2009/8os/

weboldalon!

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. október 6.

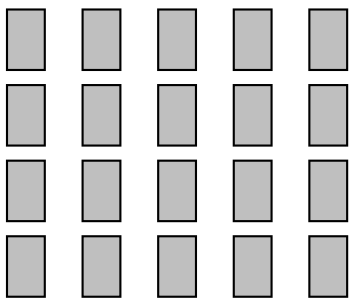
Villam05 A kamillavirág száradáskor elveszti friss tömegének 85%-át. Hány kg száraz kamilla lesz $72,4$ kg friss virágból?

Villam06 Bankba tett pénzünk évi 15%-ot kamatozik. Hány Ft-ot kapunk az 50 000 Ft-nyi betett összegért

a) egy év múlva?
b) két év múlva?
c) három év múlva?

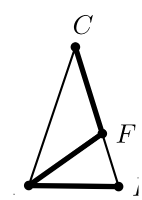
Házi feladat volt

Kom04. Öt betűkártyánk van:



Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) rakható ki belőlük?

Szog03.
Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögben a vastagon rajzolt szakaszok is egyenlőek. Mekkorák a háromszög szögei?



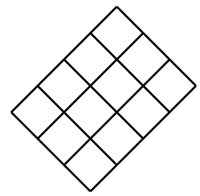
Lov04. Lovagok és lókötők szigete. (Lásd a Lov01. feladatot!)
Ismét a lovagok és lókötők szigetén járunk. Két embert egyforma típusúnak nevezünk, ha vagy mindketten lovagok, vagy mindketten lókötők. A, B és C három szigeti lakos. A ezt mondja: „B és C egyforma típusú.” Valaki megkérdezi C-től: „Egyforma típusú A és B?” Mit válaszol?

Alg02.
Az n változó mely egész értéke esetén lesz az $5(n+2)-3(1-3n)$ kifejezés értéke prímszám?

Alg03.
Négy szomszédos páratlan szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 12-t kaptunk. Mi volt a négy szám?

Órai feladatok

Kom05. Az alábbi rács rácspontjain lépegetünk. A legfelső rácspontból indulunk és egy lépésben a sréen balra vagy sréen jobbra lefelé található rácspontra léphetünk. Hányféleképpen juthatunk el a rács legalsó pontjába?



Kom06. Szig Orsolya tanárnő szereti a hat legcsintalanabb kölyköt az első sorba ültetni. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha még arra is ügyelnie kell, hogy a két vadóc, Rukka Pál és Bicska Jancsi nehogy egymás mellé kerüljön?

Lov05. Egy furcsa szigeten járunk. Az itt élők egy része lovag, másik része lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Természetesen a szigetlakók ismerik egymást, tudják egymásról, hogy ki lovag, ki lókötő. Mi nem ismerjük őket. A szigeten sétálva két őslakóval találkoztunk. Egyikük így nyilatkozott saját magukról:
– Legalább az egyikünk lovag.
Meg tudod-e állapítani, melyikük miféle?

Ter01. Egy téglalap oldalai 5 és 2 cm hosszúak. Határozzuk meg a szögfelezők által meghatározott négyszög területét!

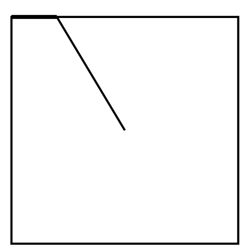
Alg04 Adjuk meg az összes olyan hatjegyű pozitívegész számot, amely a háromszorosára változik, ha a (balról) legelső jegyét áttesszük hátulra (a jobbról első helyre)!

Beadható feladatsor
2. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea06. A szilvának 80%-a víz, az aszalt szilvának már csak 40%-a víz. Mennyi szilvából lesz 100 kg aszalt szilva?

Bea07. El lehet-e szállítani 7 kéttonnás teherautóval 50 kőtömböt, melyek súlya 250, 251, 252, ..., 299 kg? (A kövek nem darabolhatók, a teherautók csak egyszer vehetők igénybe és mindegyikre legfeljebb 2 tonna teher rakható.)

Bea08. Három barát egy tortát szeretne igazságosan elosztani egymás között, amely fölülnézetből 15 cm oldalú négyzetnek látszik. Az első vágás a négyzet középpontjából indul az ábrán látható módon.



Készítsük el a négyzetet valódi nagyságában és jelöljük a középpontból induló másik két vágást úgy, hogy az ily módon keletkezett „szeletek” egyenlő területűek legyenek! Igazoljuk az eljárás helyességét!

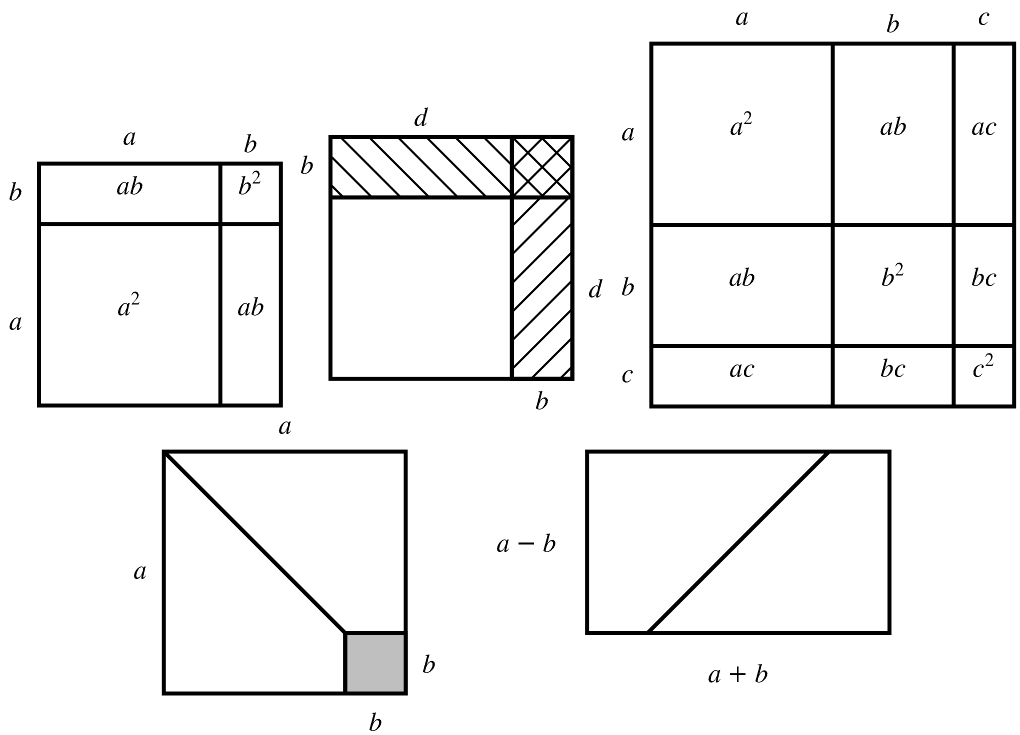
Bea09. Varázsországban a Nagy Zöld Sárkánynak 100 feje van. A mesebeli Vitéznek olyan kardja van, amivel egy csapásra csak 33 vagy 21 vagy 17 fejét tudja levágni. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 18 új feje nő ki, a második esetben 36, a harmadikban pedig 14. Ha a Sárkánynak az összes feje lehullott, akkor már nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Vitéz a Sárkányt?

Bea10. Egy 8×8-as sakktáblán 15 bábút helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban áll bábú. Igazoljuk, hogy elvehetünk a bábúk közül egyet úgy, hogy továbbra is maradjon belőlük minden sorban és minden oszlopban!

Beadási határidő: október 20. kedd.

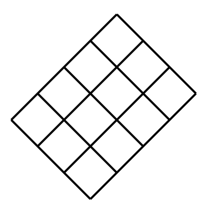
8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. október 20.

Villám07 Milyen azonosságokat szemléltetnek a következő ábrák?



Házi feladat volt

Kom05. Az alábbi rács rácspontjain lépegetünk. A legfelső rácspontból indulunk és egy lépésben a sréen balra vagy sréen jobbra lefelé található rácspontra léphetünk. Hányféleképpen juthatunk el a rács legalsó pontjába?



Kom06. Szig Orsolya tanárnő szereti a hat legcsintalanabb kölyköt az első sorba ültetni. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha még arra is ügyelnie kell, hogy a két vadóc, Rukka Pál és Bicska Jancsi nehogy egymás mellé kerüljön?

Lov05. Egy furcsa szigeten járunk. Az itt élők egy része lovag, másik része lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Természetesen a szigetlakók ismerik egymást, tudják egymásról, hogy ki lovag, ki lókötő. Mi nem ismerjük őket. A szigeten sétálva két őslakóval találkoztunk. Egyikük így nyilatkozott saját magukról:

– Legalább az egyikünk lovag.

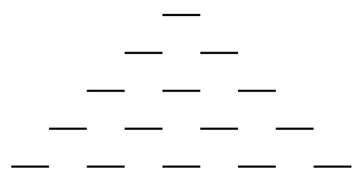
Meg tudod-e állapítani, melyikük miféle?

Ter01. Egy téglalap oldalai 5 és 2 cm hosszúak. Határozzuk meg a szögfelezők által meghatározott négyszög területét!

Alg04 Adjuk meg az összes olyan hatjegyű pozitívegész számot, amely a háromszorosára változik, ha a (balról) legelső jegyét áttesszük hátulra (a jobbról első helyre)!

Órai feladatok

Pas01 Az alábbi számháromszög alsó sorába az 1, 2, 3, 4, 5 számokat írjuk valamilyen sorrendben és minden további szám az alatta levő kettő összege lesz. Mi a legfölülre kerülő szám minimális értéke?



Alg05. Egy téglalap egyik oldalát 2, a másikat 3 cm-rel megnövelve egy 104 cm^2-rel nagyobb területű négyzetet kapunk. Mekkorák a téglalap oldalai?

Barkochba01. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. Ketten játszanak. Egyikük gondol egy számra 1-től 6-ig, a másik pedig kérdez. Egy kérdés abból áll, hogy a cédulák közül néhányat (legalább egyet, és legfeljebb az összeset) az asztal közepére húzza és a gondoló járékos megmondja, hogy közöttük van-e a gondolt szám.

a) Hány ilyen kérdéssel lehet biztosan kitalálni a gondolt számot?
b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a gondolt számot?
c) Hány kérdés szükséges, ha 2009 cédula van az 1, 2, ... , 2009 számokkal?

Sor01. Az 1, 2, 4, 8, 16, ... sorozat elemei között van-e két olyan, amelyek különbsége osztható 100-zal?

Beadható feladatsor
3. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea11. A Tristar-háromszög (lásd alább) legfölső 0-adik sorában egyetlen elem van, egy 1-es. A további sorokban mindig kettővel több szám található, minden elem a felette levő három elem összege (lásd az alábbi ábrát).

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

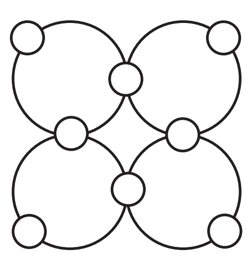
Határozzuk meg az n-edik sorban található elemek

a) összegét; **b)** váltakozó előjelű összegét! (Pl $1 - 3 + 6 - 7 + 6 - 3 + 1$.)

Bea12. Az ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara 2 cm. A BC átfogó hossza 13 cm. Mekkorák a befogók?

Bea13. Az $ABCD$ négyzet oldala 4cm. E az AD oldalnak az a pontja, melyre $AE = 1$cm. Milyen messze van a B pont az EC egyenestől?

Bea14. Helyezzük el az 1, 2, 3, ..., 8 számjegyeket az alábbi ábrán látható kis körökbe úgy, hogy bármelyik nagyobb körvonal mentén a számok összege ugyanannyi legyen!

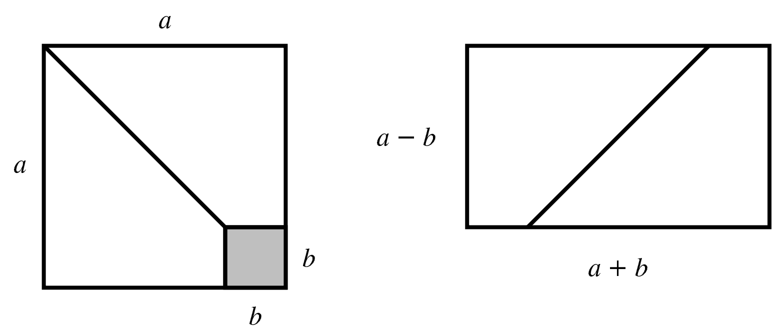


Bea15. Egy 8×8-as sakktáblán 16 bábút helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan két bábú áll. Igaz-e, hogy minden ilyen elrendezés esetén levehető 8 bábú úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban maradjon bábú?

Beadási határidő: november 3. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. november 3.

Villám08 Milyen azonosságot szemléltet a következő ábrapár?



Villám09 Számoljunk fejben!

$$1002^2 = \dots, \qquad 597 \cdot 603 = \dots, \qquad 996^2 = \dots$$

Még nem beszéltük meg:

Ter01. Egy téglalap oldalai 5 és 2 cm hosszúak. Határozzuk meg a szögfelezők által meghatározott négyszög területét!

Alg04 Adjuk meg az összes olyan hatjegyű pozitív egész számot, amely a háromszorosára változik, ha a (balról) legelső jegyét áttesszük hátulra (a jobbról első helyre)!

Sor01. Az 1, 2, 4, 8, 16, ... sorozat elemei között van-e két olyan, amelyek különbsége osztható 100-zal?

Bea11. A Tristar-háromszög (lásd alább) legfölső 0-adik sorában egyetlen elem van, egy 1-es. A további sorokban mindig kettővel több szám található, minden elem a felette levő három elem összege (lásd az alábbi ábrát).

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Határozzuk meg az n-edik sorban található elemek
a) összegét; **b)** váltakozó előjelű összegét! (Pl $1-3+6-7+6-3+1$.)

Bea12. Az ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara 2 cm. A BC átfogó hossza 13 cm. Mekkorák a befogók?

Órai feladatok

Kom07.
Hányféleképpen lehet kilyukasztani a buszjegyen három számot, ha
a) az egyik kilyukasztott szám a hetes?
b) tudjuk, hogy a hetes nincs kilyukasztva?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Alg06. Alább két szomszédos páratlan szám négyzete olvasható. Határozzuk meg a köztük található páros szám négyzetét!

$$9734479622562817600, \qquad \ldots \qquad 9734479635042868644$$

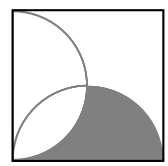
Barkochba02. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. Ketten játszanak. Egyikük gondol egy számra 1-től 6-ig, a másik pedig kérdez. Egy kérdés abból áll, hogy a cédulák közül néhányat (legalább egyet, és legfeljebb az összeset) az asztal közepére húzza és a gondoló járékos megmondja, hogy közöttük van-e a gondolt szám.

a) Hány ilyen kérdéssel lehet biztosan kitalálni a gondolt számot, ha a kérdéseket előre le kell írni (tehát azok nem függhetnek a többire adott választól)?

b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a gondolt számot?

c) Hány kérdés szükséges, ha 2009 cédula van az 1, 2, ... , 2009 számokkal?

Ter01. Az alább látható négyzet területe 16 cm^4. Határozzuk meg a szürke tartomány területét!



Beadható feladatsor

4. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

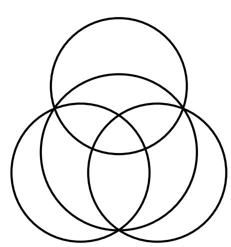
Bea16. Az $ABCD$ négyszög átlóinak szöge 30°-os, és az átlók hossza 5 ill. 8 cm. Meghatározza-e ez a három adat a négyszög területét?

Bea17. Az alábbi számok közül melyeket lehet előállítani néhány (legalább kettő) egymást követő természetes szám összegeként? Melyeket lehet többféleképpen is?

$$33, \qquad 56, \qquad 64?$$

Bea18. Az ABC egyenlőszárú háromszög BC szárán adott az M, az MC szakaszon pedig az N pont úgy, hogy $MN = AN$. Tudjuk, hogy a BAM és az NAC szögek egyenlőek. Határozzuk meg az MAC szög nagyságát!

Bea19. Négy kör úgy helyezkedik el, ahogyan az az alábbi látható. A körökön belül létrejött 10 tartományba úgy kell beírni a 0, 1, ... 9 számokat, hogy az egyes körökön belüli számok összege egyenlő legyen egymással. Legfeljebb mekkora lehet ez az összeg?



Bea20. Egy 8×8-as sakktáblán úgy helyeztünk el bábúkat, hogy minden sorban és minden oszlopban *legalább* két bábú áll. Igaz-e, hogy minden ilyen elrendezés esetén levehetők bábúk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy maradjon?

Beadási határidő: november 17. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. november 10.

Villám10 Határozzuk meg az alábbi (előjeles) összegek értékét!
a)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 11 + \ldots + 2009;$$

b)

$$1 - 3 + 5 - 7 + 11 - \ldots \pm 2009.$$

Villám11
Az ABC háromszög oldalai 5, 6 és 9 egység hosszúak. Milyen hosszú részekre osztja az egyes oldalakat a beírt kör érintési pontja?

Még nem beszéltük meg:

Bea12. Az ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara 2 cm. A BC átfogó hossza 13 cm. Mekkorák a befogók?

Bea13. Az $ABCD$ négyzet oldala 4cm. E az AD oldalnak az a pontja, melyre $AE = 1$cm. Milyen messze van a B pont az EC egyenestől?

Órai feladatok

Kom07.
Hányféleképpen lehet kilyukasztani a buszjegyen három számot, ha
a) az egyik kilyukasztott szám a hetes?
b) tudjuk, hogy a hetes nincs kilyukasztva?

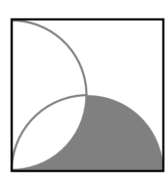
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Alg06. Alább két szomszédos páratlan szám négyzete olvasható. Határozzuk meg a köztük található páros szám négyzetét!

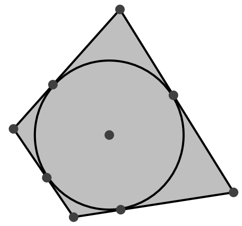
9734479622562817600, ... 9734479635042868644

Barkochba02. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. Ketten játszanak. Egyikük gondol egy számra 1-től 6-ig, a másik pedig kérdez. Egy kérdés abból áll, hogy a cédulák közül néhányat (legalább egyet, és legfeljebb az összeset) az asztal közepére húzza és a gondoló járékos megmondja, hogy közöttük van-e a gondolt szám.
a) Hány ilyen kérdéssel lehet biztosan kitalálni a gondolt számot, ha a kérdéseket előre le kell írni (tehát azok nem függhetnek a többire adott választól)?
b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a gondolt számot?
c) Hány kérdés szükséges, ha 2009 cédula van az 1, 2, ... , 2009 számokkal?

Ter02. Az alább látható négyzet területe 16 cm^4. Határozzuk meg a szürke tartomány területét!



Érintő01. Az alábbi ábrán látható négyszög *érintőnégyszög*, azaz van egy olyan kör, amely mind a négy oldalát érinti. A négyszög három oldala rendre 6, 5, 9 cm hosszú. Milyen hosszú a negyedik oldal?



Szög04. Az ABC háromszög C-nél fekvő belső szöge 68°-os. Mekkora szöget zár be egymással a
a) másik két csúcsból induló magasság?
b) másik két csúcsnál található szög szögfelezője?
c) másik két csúcsot a körülírt kör középpontjával összekötő szakasz?

Játék01.
Egy 5×7-es „sakktábla" jobb felső sarkában áll egy bábú. Ketten felváltva lépnek a bábúval. Egy lépésben balra (akárhány mezőt) vagy lefelé (akárhány mezőt) lehet lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokba lép. Kinek va nnyerő stratégiája: annak, aki kezdi a játékot, vagy a másodikra következőnek?

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. november 24.

Ez a szakkör csak 15^{45}-ig tart, 16^{00}-kor a 213. teremben Garay Barna „Az ingamozgás kaotikussága” címmel tart tudományos népszerűsítő előadást. Lásd még
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/gb1124.html

Villám11 Mik az utolsó jegyei a következő számoknak?

$$2^{22},\qquad 3^{22},\qquad 6^{22},\qquad 2009^{2009}$$

Villám12 Kössük össze az egymással egyenlőket!

$$5^{12}\qquad 5^3\cdot 5^4\qquad 5^7\qquad 5^7\cdot 5^2$$

$$\left(5^3\right)^4\qquad \frac{5^{12}}{5^5}\qquad \left(5^6\right)^2\qquad 2^7+3^7$$

Még nem beszéltük meg:

Kom07.
Hányféleképpen lehet kilyukasztani a buszjegyen három számot, ha
a) az egyik kilyukasztott szám a hetes?
b) tudjuk, hogy a hetes nincs kilyukasztva?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Játék01.
Egy 5×7-es „sakktábla” jobb felső sarkában áll egy bábú. Ketten felváltva lépnek a bábúval. Egy lépésben balra (akárhány mezőt) vagy lefelé (akárhány mezőt) lehet lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokba lép. Kinek van nyerő stratégiája: annak, aki kezdi a játékot, vagy a másodikra következőnek?

Órai feladatok

Alg07 Határozzuk meg az alábbi (előjeles) összeg értékét!

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\ldots\pm 2009^2.$$

Barkochba02. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. Ketten játszanak. Egyikük gondol egy számra 1-től 6-ig, a másik pedig kérdez. Egy kérdés abból áll, hogy a cédulák közül néhányat (legalább egyet, és legfeljebb az összeset) az asztal közepére húzza és a gondoló járékos megmondja, hogy közöttük van-e a gondolt szám.

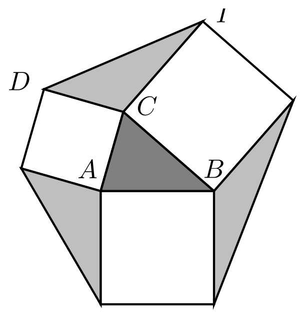
a) Hány ilyen kérdéssel lehet biztosan kitalálni a gondolt számot, ha a kérdéseket előre le kell írni (tehát azok nem függhetnek a többire adott választól)?
b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a gondolt számot?
c) Hány kérdés szükséges, ha 2009 cédula van az 1, 2, ... , 2009 számokkal?

Szög04. Az ABC háromszög C-nél fekvő belső szöge $68°$-os. Mekkora szöget zár be egymással a
a) másik két csúcsból induló magasság?
b) másik két csúcsnál található szög szögfelezője?
c) másik két csúcsot a körülírt kör középpontjával összekötő szakasz?

Gr01. Egy héttagú társaságban mindenki azt állítja, hogy ő háromszor fogott kezet. Bizonyítsd be, hogy valaki tévedett!

Gr02. *A Varga Tamás verseny 3. feladata alapján*
Egy 101 tagú társaságban az ABC sorrend szerinti első ember 1 emberrel fogott kezet, a második 2-vel a harmadik 3-mal, és így tovább, egészen a századikig, aki 100 emberrel fogott kezet. Hány emberrel fogott kezett a százegyedik ember?

Negy01. Az ABC háromszög oldalaira a $CBHI$, $ACDE$, $BAFG$ négyzeteket emeltük. Mutassuk meg, hogy $AI = BD$!



Mely szakaszok egyenlők még egymással ehhez hasonlóan?

Beadható feladatsor
5. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea21 Az ABC oldalai $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 6$ cm.

a) Szerkesszük meg a háromszöget!

b) Szerkesszük meg azt a kört, amely érinti a háromszög mindhárom oldalegyenesét és az AC egyenesnek a B csúccsal ellenkező oldalán helyezkedik el!

c) Legyen a kör és az AB, BC, CA oldalegyenesek érintési pontja rendre T_{AB}, T_{BC}, T_{CA}. Határozzuk meg a AT_{AB}, AT_{CA}, BT_{AB}, BT_{BC}, CT_{CA}, CT_{BC} szakaszok hosszát!

Bea22

Az ABC háromszög C-nél derékszögű. A Negy01. feladathoz hasonlóan a háromszög befogóira emeljük a $CBHI$, $ACDE$ négyzeteket. Mutassuk meg, hogy

a) az ABC, DIC háromszögek egybevágóak!

b) az ABC háromszög C-ből induló magasságvonala és az DIC háromszög C-hez tartozó súlyvonala ugyanaz az egyenes!

Bea23 Négyzetszám-e a következő kifejezés értéke?

$$2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2$$

Általánosítsunk!

Bea24 A Bergengóc Országgyűlés 100 képviselője a Parlament nagytermének 10 padsorában 10 oszlopban foglal helyet. A küldötteknek mind különböző a fizetése. Minden képviselő megkérdezi szomszédait (a maga mellett, előtt, mögött ülőket és az átlós szomszédait is, összesen tehát legfeljebb 8-at), hogy mennyi a fizetésük. A küldöttek meglehetősen irigyek: csak azok elégedettek a bérükkel, akiknek legfeljebb egy olyan szomszédja van, aki többet keres náluk. Legfeljebb hány olyan képviselő lehet a Parlamentben, aki meg van elégedve a fizetésével?

Bea25 Tizenkét ember ül egy asztal körül: lovagok és lókötők. Így szólt mindegyikük: mindenki – esetleg rajtam és szomszédaimon kívül – lókötő. Hány lovag ül az asztalnál, ha tudjuk, hogy a lókötők mindig hazudnak, a lovagok pedig mindig igazat mondanak?

Beadási határidő: december 1. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. december 1.

Villám13 Számoljunk ügyesen, indokoljunk is!
$\frac{38^3}{19^3} =$ $\frac{48^4}{27\cdot 16^4} =$

Villám14 Milyen $x, y \in \mathbb{N}$-re igazak a következő egyenlőségek?
$4^x = 2^y$ $8^x = 4^y$

Még nem beszéltük meg:

Játék02. Egy 5×7-es „sakktábla” jobb felső sarkában áll egy bábú. Ketten felváltva lépnek a bábúval. Egy lépésben balra (akárhány mezőt) vagy lefelé (akárhány mezőt) lehet lépni. Az *veszt*, aki a bal alsó sarokba lép. Kinek van nyerő stratégiája: annak, aki kezdi a játékot, vagy a másodikra következőnek?

Barkochba02. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. Ketten játszanak. Egyikük gondol egy számra 1-től 6-ig, a másik pedig kérdez. Egy kérdés abból áll, hogy a cédulák közül néhányat (legalább egyet, és legfeljebb az összeset) az asztal közepére húzza és a gondoló járékos megmondja, hogy közöttük van-e a gondolt szám.

a) Hány ilyen kérdéssel lehet biztosan kitalálni a gondolt számot, ha a kérdéseket előre le kell írni (tehát azok nem függhetnek a többire adott választól)?
b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a gondolt számot?
c) Hány kérdés szükséges, ha 2009 cédula van az 1, 2, ... , 2009 számokkal?

Szög04. Az ABC háromszög C-nél fekvő belső szöge $68°$-os. Mekkora szöget zár be egymással a
a) másik két csúcsból induló magasság?
b) másik két csúcsnál található szög szögfelezője?
c) másik két csúcsot a körülírt kör középpontjával összekötő szakasz?

Gr01. Egy héttagú társaságban mindenki azt állítja, hogy ő háromszor fogott kezet. Bizonyítsd be, hogy valaki tévedett!

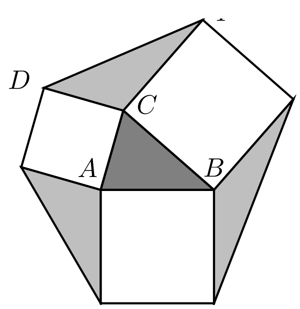
Órai feladatok

Alg07 Határozzuk meg az $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots \pm 2009^2$ értékét!

Játék03. Két kupac egyikében 7, a másikban 5 gyufa van. Ketten játszanak, felváltva veszne kel gyufákat. Egy lépésben csak az egyik kupacból lehet elvenni gyufát, de abból tetszőleges számút. Az *nyer*, aki az utolsó gyufát veszi el. Kinek van nyerő stratégiája: annak, aki kezdi a játékot, vagy a másodikra következőnek?

Gr02. *A Varga Tamás verseny 3. feladata alapján*
Egy 101 tagú társaságban az ABC sorrend szerinti első ember 1 emberrel fogott kezet, a második 2-vel a harmadik 3-mal, és így tovább, egészen a századikig, aki 100 emberrel fogott kezet. Hány emberrel fogott kezett a százegyedik ember?

Negy01. Az ABC háromszög oldalaira a $CBHI$, $ACDE$, $BAFG$ négyzeteket emeltük. Mutassuk meg, hogy $AI = BD$!

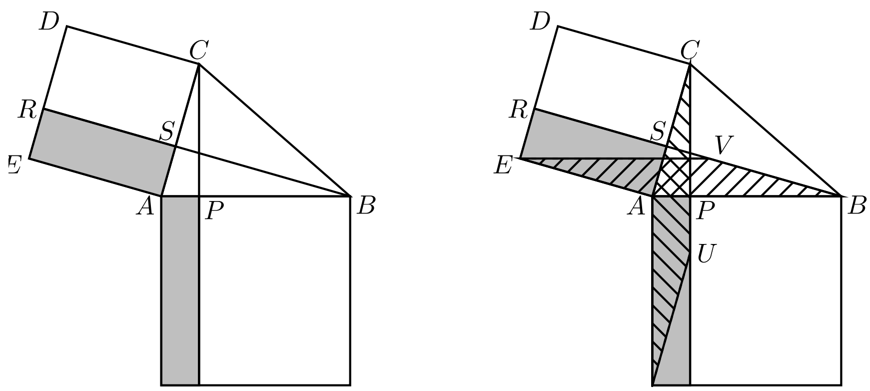


Mely szakaszok egyenlők még egymással ehhez hasonlóan?

Gr03. Van-e olyan tíztagú társaság, amelyben az embereknek rendre
a) $4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$; **b)** $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;

c) $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2$; **d)** $9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 4, 4$
ismerőse van? (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

Negy02. Az ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk és berajzoltuk a háromszög magasságvonalainak egyeneseit is (lásd az alábbi ábra bal oldalát). Mutassuk meg, hogy az azonosan színezett téglalapok területe egyenlő!



Fejezzük be az alábbi megoldáskezdeményeket!

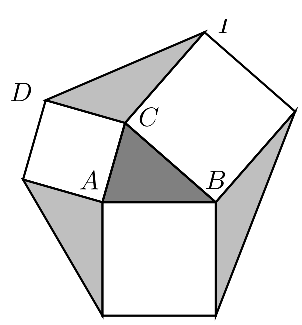
I. megoldás (*Euklidesz darabolási módszere*)
Húzzuk be az AC-vel párhuzamos FU és az AB-vel párhuzamos EV szakaszokat…

II. megoldás (*Hasonlósági meggondolás*)
Fejezzük ki az ACP, ABS háromszögek szögeit az ABC háromszög $BAC\angle = \alpha$ szögével!…

Beadható feladatsor
6. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea26 Az ABC háromszög beírt köre az AB oldalt a T_{AB} pontban érinti, míg az a másik kör, amely a háromszög mindhárom oldalegyenesét érinti, de a BC oldalegyenes által határolt azon félsíkban van, amely nem tartalmazza az A csúcsot (a háromszög a oldalához *hozzáírt* kör) az AB egyenest U_{AB} ben érinti. Határozzuk meg ez utóbbi kör sugarát, ha $AT_{AB} = 10$, $T_{AB}B = 2$ és $BU_{AB} = 3$.

Bea27 Egy háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk. Az alábbi ábrán látható négy háromszög (ABC, DCI, FAE, HBG) területe összesen hányféle érték?



Bea28 Mutassuk meg, hogy a $2003 \cdot 2004 \cdot 2005 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 + 36$ kifejezés értéke négyzetszám!

Bea29 Egy társaságban öt házaspár van jelen. Azok, akik nem ismerik egymást, bemutatkozásul kezet fognak egymással. Kovács úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? És Kovács úr?

Bea30

a) 2008 **b)** 2009

lámpa egy körben helyezkedik el. Mindegyik lámpa vagy ég vagy nem ég. Egy lépésben megváltoztathatjuk három egymást követő lámpa állapotát: az égőket leoltjuk, amelyik nem égett, azt fölkapcsoljuk. El lehet-e érni, hogy minden lámpa égjen, ha kezdetben csak egy égett?

Beadási határidő: december 15. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. december 8.

Villám15. Számoljunk ügyesen, indokoljunk is!
$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}=$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}=$
Villám16. Folytassuk!
$x-1=x-1;$
$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$
$x^3-1=(x-1)\cdot\ldots$
$\vdots$

Még nem beszéltük meg:

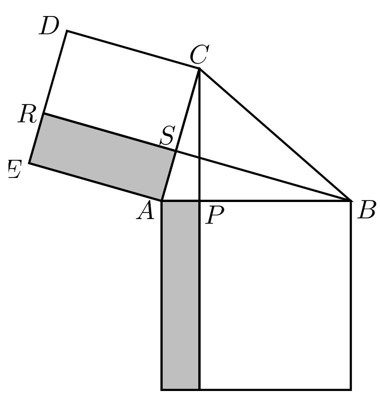
Szög04. Az ABC háromszög C-nél fekvő belső szöge $68°$-os. Mekkora szöget zár be egymással a
a) másik két csúcsból induló magasság?
b) másik két csúcsnál található szög szögfelezője?
c) másik két csúcsot a körülírt kör középpontjával összekötő szakasz?

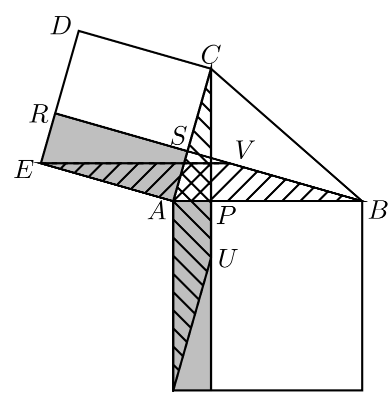
Gr02. *A Varga Tamás verseny 3. feladata alapján*
Egy 101 tagú társaságban az ABC sorrend szerinti első ember 1 emberrel fogott kezet, a második 2-vel a harmadik 3-mal, és így tovább, egészen a századikig, aki 100 emberrel fogott kezet. Hány emberrel fogott kezett a százegyedik ember?

Gr03. Van-e olyan tíztagú társaság, amelyben az embereknek rendre
a) $4,3,3,3,3,3,3,3,3,3;$ **b)** $9,3,3,3,3,3,3,3,2,0;$
c) $9,3,3,3,3,3,3,3,2,2;$ **d)** $9,9,9,8,8,8,7,6,4,4$
ismerőse van? (Az ismerettséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

Órai feladatok

Negy02. Az ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk és berajzoltuk a háromszög magasságvonalainak egyeneseit is (lásd az alábbi ábra bal oldalát). Mutassuk meg, hogy az azonosan színezett téglalapok területe egyenlő!





Fejezzük be az alábbi megoldáskezdeményeket!

I. megoldás (*Euklidesz darabolási módszere*)
Húzzuk be az AC-vel párhuzamos FU és az AB-vel párhuzamos EV szakaszokat...

II. megoldás (*Hasonlósági meggondolás*)
Fejezzük ki az ACP, ABS háromszögek szögeit az ABC háromszög $BAC\angle=\alpha$ szögével!...

Barkochba03. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. A cédulák egy-egy súlyt jelképeznek, amelyek mindegyike egyforma tömegű, kivéve az egyiket, amelyik hibás, nehezebb tömegnek felel meg, mint a többi. Ketten játszanak. Egyikük kigondolja, hogy a súlyok közül melyik lesz a nehezebb. A másik játékos, mintha egy kétkarú mérleg két serpenyőjébe tenné, elhelyez az asztal közepétől balra és jobbra cédulákat. A gondoló játékos megmondja, hogy egyenlők-e vagy melyik serpenyőben nagyobb a golyók össztömege. A másik játékos újra és újra „mérhet”, míg ki nem találja, hogy melyik golyó a nehezebb.

a) Hány ilyen méréssel lehet biztosan megtalálni a hibás súlyt?

b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a hibás súlyt?

c) Hány kérdés szükséges, ha eredetileg 2009 súly van?

Szmsz01. M, A, R, O, K.

a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *egyszer* használhatjuk?

b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AKMOR$, $AKMRO$, $AKOMR$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?

Szmsz02. M, A, R, O, K.

a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *akárhányszor* felhasználhatjuk?

b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AAAAA$, $AAAAK$, $AAAAM$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?

c) A tanár a következő órán villámkérdést tervez feltenni. Mond egy számot és rá kell vágni, hogy a listában mi az annyiadik szó *utolsó* betűje. Találjunk ki gyors módszert a helyes válasz megtalálására!

d)) Hogyan található ki az *utolsó előtti* betű, az első három meghatározása nélkül?

Játék05. *Osztójáték*

a) Két játékos felváltva mondhatja a 24 pozitív osztóit, de a 24-et, és már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, akinek már nem marad osztó.

A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?

b) Mi a helyzet, ha a 24 helyett a 36 osztóival játszunk?

8-os tehetséggondozó szakkör, 2009. december 15.

Villám17. Számoljunk ügyesen, indokoljunk is!
$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+2\cdot 3^5+2\cdot 3^6=$
$1+4+4^2+4^3+4^4+4^5=$

Még nem beszéltük meg:

Barkochba03. Hat cédulánk van, rajtuk egy-egy szám 1-től 6-ig. A cédulák egy-egy súlyt jelképeznek, amelyek mindegyike egyforma tömegű, kivéve az egyiket, amelyik hibás, nehezebb tömegnek felel meg, mint a többi. Ketten játszanak. Egyikük kigondolja, hogy a súlyok közül melyik lesz a nehezebb. A másik játékos, mintha egy kétkarú mérleg két serpenyőjébe tenné, elhelyez az asztal közepétől balra és jobbra cédulákat. A gondoló játékos megmondja, hogy egyenlők-e vagy melyik serpenyőben nagyobb a golyók össztömege. A másik játékos újra és újra „mérhet”, míg ki nem találja, hogy melyik golyó a nehezebb.

a) Hány ilyen méréssel lehet biztosan megtalálni a hibás súlyt?
b) Hány cédulából lehet ugyanennyi kérdésből kitalálni a hibás súlyt?
c) Hány kérdés szükséges, ha eredetileg 2009 súly van?

Szmsz01. M, A, R, O, K.
a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *egyszer* használhatjuk?
b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AKMOR$, $AKMRO$, $AKOMR$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?

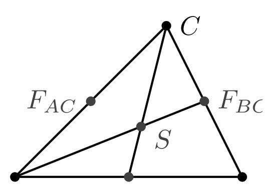
Szmsz02. M, A, R, O, K.
a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *akárhányszor* felhasználhatjuk?
b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AAAAA$, $AAAAK$, $AAAAM$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?
c) A tanár a következő órán villámkérdést tervez feltenni. Mond egy számot és rá kell vágni, hogy a listában mi az annyiadik szó *utolsó* betűje. Találjunk ki gyors módszert a helyes válasz megtalálására!
d)) Hogyan található ki az *utolsó előtti* betű, az első három meghatározása nélkül?

Órai feladatok

Játék05. *Osztójáték*
a) Két játékos felváltva mondhatja a 24 pozitív osztóit, de a 24-et, és már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, akinek már nem marad osztó.
A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?
b) Mi a helyzet, ha a 24 helyett a 36 osztóival játszunk?

Graf04.
Egy 10 főből álló társaságban némely emberek kezet fogtak egymással. Igaz-e, hogy mindig van két ember, aki ugyanannyiszor fogott kezet?

Ter03.
Az ABC háromszög területe T. Mekkora részekre osztja a háromszöget az
a) A csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz (súlyvonal)?
b) A és a C csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő két szakasz (súlyvonal)?



Ter04. Egy trapéz a két átlójával négy háromszögre osztottunk. Az egyik alap melletti rész területe 4 cm^2, az egyik szár mellettié 6 cm^2. Mekkora a többi rész területe?

Graf05. Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők közt. Az első 13 válaszoló közül öten mondtak hármat, nyolcan négyet. Vajon hány osztálytársa volt jelen a többi gyereknek, ha azt tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa?

Koo01. Vegyünk fel minél több rácspontot a koordinátarendszerben úgy, hogy semelyik kettő felezőpontja se legyen rácspont!

Segítség a Játék 05. feladathoz

Rendezzük el 24 osztóit az alábbi mószerrel. Kerüljön legalulra az 1-es és mindig akkor tegyünk egy számot a másik fölé, ha ő többszöröse az alatta levőnek. Segít, ha pl a „kétszerezést” piros nyíllal jelöljük és jobbra felfelé tesszük a kétszerest, míg a háromszorozást kék nyíllal jelöljük és balra felfelé tesszük a háromszorost.

Rajzoltassuk meg az alábbi számok osztóhálóit is: 32, 72, 30, 60. Vegyük észre 30 osztóhálójában a kockát.

Segítség a Graf 04. feladathoz

Ha mindenki különböző számúszor fogott volna kezet, akkor a kézfogások száma rendre 0, 1, 2, . . ., 9 lenne. Lehet-e ez?

Segítség a Ter 03. feladathoz

Ne használjuk fel, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást. Ezt most bizonyítjuk be.

ASF_{AB} és CSF_{BC} területe egyenlő, mert $AF_{BC}B$ és $CF_{AB}B$ területe is fele az ABC háromszög területének és ezekből vonjuk ki az $SF_{AB}BF_{BC}$ négyszög területét.

Rajzoljuk be a BS szakaszt is!

Folytatás: Húzzuk be az SF_{AC} szakaszt is. Mutassuk meg, hogy hat egyenlő terület jön létre. Mutassuk meg ebből, hogy BSF_{AC} nem törik meg S-ben (BF_{AC} is felezi a területet).

Mutassuk meg a területekkel, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást!

Segítség a Ter 04. feladathoz

A szárak melletti részek egyenlők egymással. Miért is? (Egészítsük ki mindkettőt az egyik alap melletti résszel.)

Tekintsük az egyik átlót. Ez közös oldalegyenese mind a négy háromszögnek. Rajzoljuk be az ehhez tartozó magasságokat.

Más: A szemközti alapokhoz tartozó háromszögek hasonlók. Mi az arány?

Segítség a Koo 01. feladathoz

Négynél többet nem lehet. A pontok koordinátáinak paritása négyféle lehet:

(ps, ps) (ps, ptlan) (ptlan, ps) (ptlan, ptlan)

Ha van két egyforma típusú, akkor a felezőpontjuk rácspont.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. január 5.

Emlékeztető: A január 19-ei szakkör rövidebb lesz. $16.00 - tl$ a 213. teremben Rimányi Richárd ad elő. Részletek a http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/rr0119.html weboldalon olvashatók.

Villám18. Mennyi a tizenkilencedik prímszám és a tizenkilencedik összetett szám szorzata?

Még nem beszéltük meg:

Játék05. *Osztójáték*
a) Két játékos felváltva mondhatja a 24 pozitív osztóit, de a 24-et, és már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, akinek már nem marad osztó.
A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?
b) Mi a helyzet, ha a 24 helyett a 36 osztóival játszunk?

Koo02. Vegyünk fel minél több rácspontot a térbeli koordinátarendszerben úgy, hogy semelyik kettő felezőpontja se legyen rácspont!

Órai feladatok

2010.01. Van-e olyan
a) négyzetszám, **a)** faktoriális,
amely 2010-re végződik?

2010.02. Van-e olyan 13-mal osztható szám, amely 2010-re végződik?

2010.03. Végződhet-e két négyzetszám különbsége 2010-re?

2010.04. Megválaszthatók-e úgy az előjelek, hogy teljesüljön az alábbi összefüggés?

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm 2009 \pm 2010 = 2010$$

2010.05. Legalább hány pont esetén fordulhat az elő, hogy ha behúzzuk mindegyik kettő összekötő egyenesét, akkor összesen épp 2010 egyenest kapunk?

2010.06.
a) Hány (pozitív) osztója van 2010-nek?
Ezek között hány
b) páros **c)** négyzetszám
van?

2010.07. Rajzoljuk le
a) 30 , **b)** 2010
osztóhálóját!

2010.08. 2010 osztói közül maximum hány választható ki úgy, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik többszöröse?

2010.09. Hány olyan nem egybevágó 2010 cm^3 térfogatú téglatest van, amely mindegyik éle cm-ben egész hosszúságú?

2010.10. Felírható-e öt egymást követő négyzetszám összegeként a 2010?

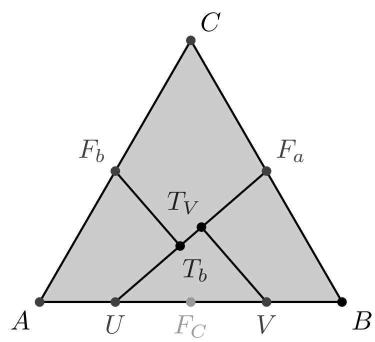
2010.11.
a) Egy sakktábla két sarkát levágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 62 mező 31 db 2×1-es dominólappal?
b) Egy sakktábla egyik sarkát levágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 63 mező 21 db 3×1-es dominólappal?
c) Mely n-re fedhető le a 2010×2010-es sakktábla $n \times 1$-es dominólapokkal? Döntsük el a kérdést minden $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ számra!

Beadható feladatsor
7. feladatsor, 2009/2010, 8-os FPI szakkör

Bea31. Ha Nagy Sándor 5 évvel korábban halt volna meg, életének egynegyed részében uralkodott volna. Ha 9 évvel tovább élt volna, életének felében uralkodott volna. Tudván, hogy királyként halt meg, hány évig uralkodott Nagy Sándor?

Bea32 Legkevesebb hány négyzetszám összegeként írható fel a 2010?

Bea33 Az ABC szabályos háromszög oldalai 16 cm hosszúak. Az AB, BC, CA oldalak felezőpontja rendre F_c, F_a, F_b, az AF_c, F_cB szakaszok felezőpontjai U és V. Az F_b, V pontok merőleges vetülete az UF_A szakaszon T_b és T_V.



Igaz-e, hogy ha az ABC háromszöget feldaraboljuk az UF_a, F_bT_b, VT_V szakaszokkal, akkor a kapott négy darabból négyzet állítható össze?

Bea34. Péter egy 10 cm oldalú négyzet belsejében egy 1 cm oldalú négyzetet helyezett el, amelynek oldalai a nagy négyzet oldalaival párhuzamosak. Pál ki szeretné találni, hogy pontosan hol helyezkedik el Péter kis négyzete. Ha Pál kijelöl egy tetszőleges sokszöget, akkor Péter megmondja, hogy annak hány cm2 a kis négyzettel való közös része. Elegendő-e két ilyen „kérdés” a kis négyzet megtalálásához?

Bea35. 2010 lámpa egy körben helyezkedik el. Mindegyik lámpa vagy ég vagy nem ég. Egy lépésben megváltoztathatjuk három egymást követő lámpa állapotát: az égőket leoltjuk, amelyik nem égett, azt fölkapcsoljuk. El lehet-e érni, hogy minden lámpa égjen, ha kezdetben csak egy égett?

Beadási határidő: január 19. kedd.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. január 19.

Kis Kavics Kupa

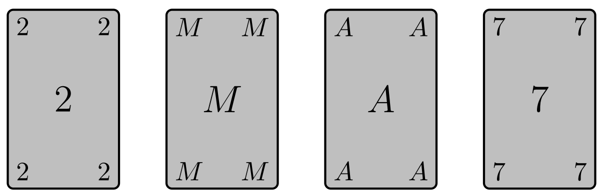
A diákok kétfős csapatokat alkotnak és csapatnevet választanak. Az alábbi feladatokon gondolkodhatnak. Amikor készen vannak egy feladat megoldásával és egymás közt ellenőrizték is a gondolatmenetet és az eredményt, akkor egy kis cetlin kivihetik a játékvezetőhöz. A cetlin rajta kell legyen a csapat neve, mellette a feladat sorszáma és a feladat végeredménye, ami egy vagy néhány szám, vagy betű. Ha a feladat megoldása nem tökéletes, akkor a játékvezető annyit mond, hogy „Nem jó”. Ezután a csapat javíthat, még egyszer kihozhatja a módosított megoldást. Elsőre jó válaszért 2 pont, a másodikra kihozott jó válaszért 1 pont jár.

SZÁMOLÓGÉP NEM HASZNÁLHATÓ!

1. A $2; 0; 1; 0$ számkártyák felhasználásával hány négyjegyű szám állítható elő?

2. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

3. Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van. Ezt látod az asztalon:



Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét?

4. Egy trapéz két alapja 3 és 7 cm hosszú, két átlója pedig 5 és 7 cm-es. Milyen hosszú részekre osztja a 7 cm-es átló az 5 cm-es átlót?

5. Határozzzuk meg $1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 + \ldots + 2010$ pontos értékét!

6. Egy szobában 10 szék van sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) föláll és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt egyszerre a szobában?

7. Valaki pozitív egész számokat ír fel egy papírlapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek, továbbá az is igaz, hogy utolsó számjegyeik is azonosak?
(Pl három ilyen szám a 3518, 328 és a 38.)

8. Hányféleképpen lehet egymástól és 0-tól különböző számjegyeket írni az A, I, L, P betűk helyére úgy, hogy teljesüljön az alábbi összeadás?

$$\begin{array}{cccc} P & A & L & I \\ & P & I & A \\ & & A & L \\ + & & & P \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

9. 2010 osztói közül maximum hány választható ki úgy, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik többszöröse?

10. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak. Azt vettük észre, hogy azokban a papíron levő számokban, amelyekben van egyes nincs kettes. Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

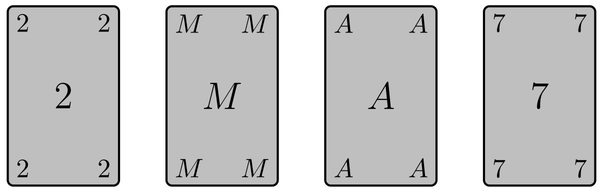
11. Az 5 nem négyzetszám, de felírható két négyzetszám összegeként: $5 = 2^2 + 1^2$. Ha négyzetszámok összegeként akarjuk előállítani, akkor a 6-hoz három négyzetre van szükség: $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, míg a 7 előállításához négy négyzetszám kell: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Legkevesebb hány négyzetszám összegeként állítható elő a 2010?

Megoldások

1. A $2; 0; 1; 0$ számkártyák felhasználásával hány négyjegyű szám állítható elő? 6 szám

2. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával! $\frac{7}{15} \cdot 2010 = 938$, $\frac{8}{15} \cdot 2010 = 1072$

3. Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betu van. Ezt látod az asztalon:



Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét? $A, 7$

4. Egy trapéz két alapja 3 és 7 cm hosszú, két átlója pedig 5 és 7 cm-es. Milyen hosszú részekre osztja a 7 cm-es átló az 5 cm-es átlót? $1,5$ és $3,5$

5. Határozzzuk meg $1 - 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 + \ldots + 2010$ pontos értékét! 1 347 370

6. Egy szobában 10 szék van sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) föláll és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt egyszerre a szobában? 9

7. Valaki pozitív egész számokat ír fel egy papírlapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek, továbbá az is igaz, hogy utolsó számjegyeik is azonosak?
(Pl három ilyen szám a 3518, 328 és a 38.) 181

8. Hányféleképpen lehet egymástól és 0-tól különböző számjegyeket írni az A, I, L, P betűk helyére úgy, hogy teljesüljön az alábbi összeadás?

$$\begin{array}{rcccc} & P & A & L & I \\ & & P & I & A \\ & & & A & L \\ + & & & & P \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Négyféleképpen. $P = 1$, $A = 7$ és $L + I = 12$, azaz

L	3	4	8	9
I	9	8	4	3

9. 2010 osztói közül maximum hány választható ki úgy, hogy a kiválasztottak között egyik se legyen a másik többszöröse? Hat

10. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak. Azt vettük észre, hogy azokban a papíron levő számokban, amelyekben van egyes nincs kettes. Legfeljebb hány szám lehet a papíron? 8080

11. Az 5 nem négyzetszám, de felírható két négyzetszám összegeként: $5 = 2^2 + 1^2$. Ha négyzetszámok összegeként akarjuk előállítani, akkor a 6-hoz három négyzetre van szükség: $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, míg a 7 előállításához négy négyzetszám kell: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Legkevesebb hány négyzetszám összegeként állítható elő a 2010? Három

Az alábbi táblázat tartalmazza a 2010 összes előállítását három négyzet összegére.

Bármelyik oszlopban a három szám négyzetösszege 2010.

1	4	5	5	7	11	16	19
28	25	7	31	19	17	23	25
35	37	44	32	40	40	35	32

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. február 2.

Villám19. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Szjegy01 Mi lehet az x és az y számjegy, ha 36 osztja a $\overline{32x45y}$ számot?

2010.12. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben
a) van 0? **b)** legalább két 0 van?

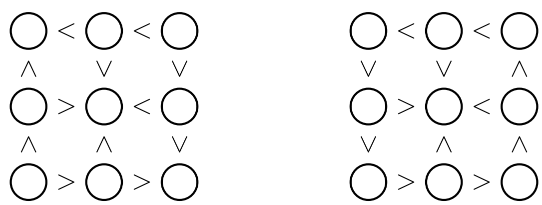
ős01
a) Kik vannak többen? Nagyapáim dédapjai vagy dédapáim nagyapjai?
b) Megegyezik-e a nagyapáim dédapjaiból álló halmaz a dédapáim nagyapjaiból álló halmazzal?

szmsz03 A kilenctagú $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan kilenctagú számsorozat „összegeként”, amelyek midnegyikében csak kétféle szám szerepel pl. $(0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0)$. A sorozatok összegét úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze. Pl.:

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) = (1, 3, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1).$$

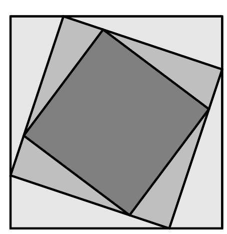
2010.13. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.
a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

sorrend01 Írjuk be a körökbe 1-től 9-ig az egész számokat úgy, hogy a kisebb-nagyobb jeleknek megfeleljenek!

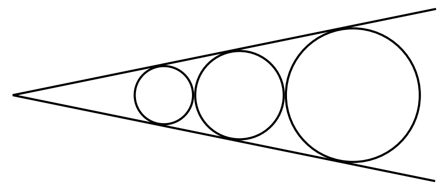


diof01 Két pozitív egész szám szorzata 1000-rel nagyobb az összegüknél. Melyek lehetnek ezek a számok?

has01 Egy 64 cm^2 területű négyzet oldalainak negyedelőpontjait az ábra szerint összekötve egy kisebb négyzet kaptunk. Annak negyedelőpontjai egy még kisebb négyzetet alkotnak. Határozzuk meg ennek területét!



has02
Egy szög szárait érinti három kör, amelyek az ábra szerint egymást is érintik. Ha a legkisebb kör sugara 2 cm, a középsőé 3 cm, akkor mekkora lehet a legnagyobb kör sugara?



Megoldások, útmutatások

Villám19. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Megoldás

Ha az egyenlő heted és nyolcad értéke x, akkor a két szám $7x$ és $8x$. Ezek összege 2010, tehát a két szám

$$\frac{7}{15}\cdot 2010 = 938, \qquad \text{és} \qquad \frac{8}{15}\cdot 2010 = 1072.$$

Szjegy01 Mi lehet az x és az y számjegy, ha 36 osztja a $\overline{32x45y}$ számot?

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel is osztható. Egy szám pontosan akkor osztható néggyel, ha az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható néggyel. Egy szám pontosan akkor osztható kilenccel, ha számjegyeinek összege osztható kilenccel.

A négyes oszthatóság szerint $y = 2$ vagy $y = 6$. Az előbbi esetben $x = 2$, az utóbbiban $x = 7$, tehét a két megoldás: 322452 és 327456.

2010.12. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben

a) van 0? **b)** legalább két 0 van?

Megoldás

a) Összesen $9\cdot 10^3 = 9000$ négyjegyű szám van, ebből 9^4 számban *nincs* 0-s számjegy, tehát $9000-9^4 = 2529$-ben van.

b) Vagy pontosan két 0 vagy pontosan három 0 van a számban. Az előbbiből $3\cdot 81 = 243$ van, az utóbbiból 9, összesen tehát 252.

ős01

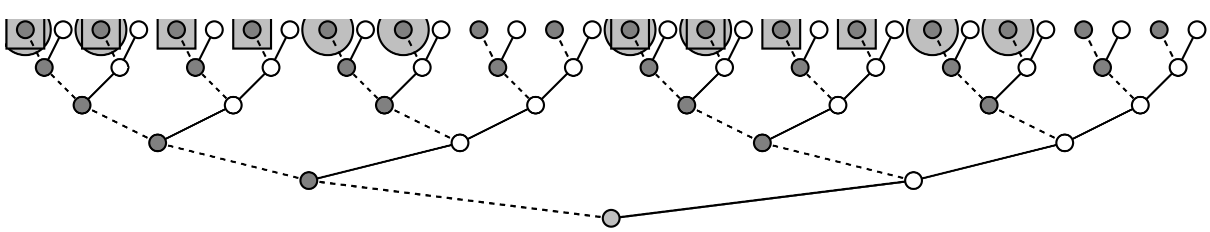
a) Kik vannak többen? Nagyapáim dédapjai vagy dédapáim nagyapjai?

b) Megegyezik-e a nagyapáim dédapjaiból álló halmaz a dédapáim nagyapjaiból álló halmazzal?

Megoldás

a) Mindenkinek két szülője, négy nagyszülője és nyolc dédszülője van. Ezek fele férfi, azaz egy apja, két nagyapja és négy dédapja van az embereknek. A két nagyapának összesen $2\times 4 = 8$ dédapja, a négy dédapának összesen $4\times 2 = 8$ nagyapja van. Tehát a kérdezett emberek ugyanannyian vannak.

b) Nem egyezik meg a két halmaz. Alább látható egy családfa, ahol a kis fehér karikák a nőket, a sötétszürkék a férfiakat jelölik. A nagyapák dédapjait halványszürke négyzet, a dédapák nagyapjait halványszürke nagy kör jelzi.



szmsz03 A kilenctagú $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan kilenctagú számsorozat „összegeként”, amelyek midnegyikében csak kétféle szám szerepel pl. $(0,2,2,0,0,2,2,0,0)$. A sorozatok összegét úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze. Pl.:

$$(1,1,0,0,1,0,0,0,1) + (0,2,2,0,0,2,2,0,0) = (1,3,2,0,1,2,2,0,1).$$

Megoldás: Lásd a Bergengóc példatár 102. feladatát.

2010.13. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.

a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

Megoldás
a) 2010, 1000, 1999.

b) Ehhez a feladathoz túlzásnak tűnhet, de hasonló példák elemzésekor feltétlenül hasznos az alábbi típusú táblázat. A táblázat egyes mezőibe azon négyjegyű számok számát írjuk, amelyek rendelkeznek a mező oszlopának és sorának fejlécében olvasható tulajdonsággal. Az „Összesen” rovatokba pedig a megfelelő sorokban, illetve oszlopokban található számok összegét kell beírni.

A kitöltetlen táblázat

4-jegyű számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2			
Nincs benne 2			
Összesen			9000

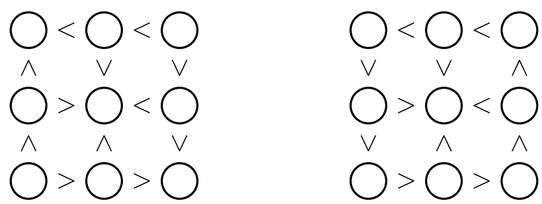
A táblázat részleges kitöltése

4-jegyű számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2		9^4-8^4	
Nincs benne 2		8^4	
Összesen		9^4	9000

A papíron csak olyan számok nem lehetnek, amelyekben van 2-es, de nincs 0-s. Ezek számát a „Nincs benne 0” oszlopban alulról felfelé haladva határozhatjuk meg (jobb oldali táblázat). A feladat kérdésére a válasz: legfeljebb $9\cdot 10^3-9^3+8^3=8783$ szám lehet a papíron.

Megjegyzés
Pataki János hívta fel rá a figyelmemet, hogy ez a táblázatos eljárás áttekinthetőbb a hasonló feladatokban használt Venn diagrammos módszernél.

sorrend01 Írjuk be a körökbe 1-től 9-ig az egész számokat úgy, hogy a kisebb-nagyobb jeleknek megfeleljenek!



Megoldás: Lásd a Bergengóc példatár 91. feladatát.

diof01 Két pozitív egész szám szorzata 1000-rel nagyobb az összegüknél. Melyek lehetnek ezek a számok?

Megoldás kezdemény: Az $xy=x+y+1000$ egyenletből $xy+x+y+1=1001$, azaz $(x+1)(y+1)=1001\ldots$

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. február 2.

Villám19. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Szjegy01 Mi lehet az x és az y számjegy, ha 36 osztja a $\overline{32x45y}$ számot?

2010.12. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben
a) van 0? **b)** legalább két 0 van?

ős01
a) Kik vannak többen? Nagyapáim dédapjai vagy dédapáim nagyapjai?
b) Megegyezik-e a nagyapáim dédapjaiból álló halmaz a dédapáim nagyapjaiból álló halmazzal?

szmsz03 A kilenctagú $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan kilenctagú számsorozat „összegeként”, amelyek midnegyikében csak kétféle szám szerepel pl. $(0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0)$. A sorozatok összegét úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze. Pl.:

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) = (1, 3, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1).$$

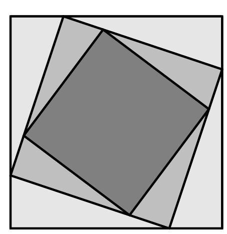
2010.13. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.
a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

sorrend01 Írjuk be a körökbe 1-től 9-ig az egész számokat úgy, hogy a kisebb-nagyobb jeleknek megfeleljenek!

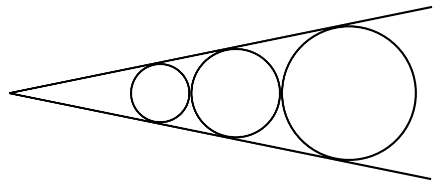
$$\begin{array}{ccccc} \bigcirc & < & \bigcirc & < & \bigcirc \\ \wedge & & \vee & & \vee \\ \bigcirc & > & \bigcirc & < & \bigcirc \\ \wedge & & \wedge & & \vee \\ \bigcirc & > & \bigcirc & > & \bigcirc \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \bigcirc & < & \bigcirc & < & \bigcirc \\ \vee & & \vee & & \wedge \\ \bigcirc & > & \bigcirc & < & \bigcirc \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \bigcirc & > & \bigcirc & > & \bigcirc \end{array}$$

diof01 Két pozitív egész szám szorzata 1000-rel nagyobb az összegüknél. Melyek lehetnek ezek a számok?

has01 Egy 64 cm^2 területű négyzet oldalainak negyedelőpontjait az ábra szerint összekötve egy kisebb négyzet kaptunk. Annak negyedelőpontjai egy még kisebb négyzetet alkotnak. Határozzuk meg ennek területét!



has02
Egy szög szárait érinti három kör, amelyek az ábra szerint egymást is érintik. Ha a legkisebb kör sugara 2 cm, a középsőé 3 cm, akkor mekkora lehet a legnagyobb kör sugara?



Megoldások, útmutatások

Villám19. Bontsuk fel a 2010-et két szám összegére úgy, hogy az egyik szám hetede egyenlő legyen a másik szám nyolcadával!

Megoldás

Ha az egyenlő heted és nyolcad értéke x, akkor a két szám $7x$ és $8x$. Ezek összege 2010, tehát a két szám

$$\frac{7}{15}\cdot 2010 = 938, \qquad \text{és} \qquad \frac{8}{15}\cdot 2010 = 1072.$$

Szjegy01 Mi lehet az x és az y számjegy, ha 36 osztja a $\overline{32x45y}$ számot?

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel is osztható. Egy szám pontosan akkor osztható néggyel, ha az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható néggyel. Egy szám pontosan akkor osztható kilenccel, ha számjegyeinek összege osztható kilenccel.

A négyes oszthatóság szerint $y = 2$ vagy $y = 6$. Az előbbi esetben $x = 2$, az utóbbiban $x = 7$, tehét a két megoldás: 322452 és 327456.

2010.12. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben

a) van 0? **b)** legalább két 0 van?

Megoldás

a) Összesen $9\cdot 10^3 = 9000$ négyjegyű szám van, ebből 9^4 számban *nincs* 0-s számjegy, tehát $9000-9^4 = 2529$-ben van.

b) Vagy pontosan két 0 vagy pontosan három 0 van a számban. Az előbbiből $3\cdot 81 = 243$ van, az utóbbiból 9, összesen tehát 252.

ős01

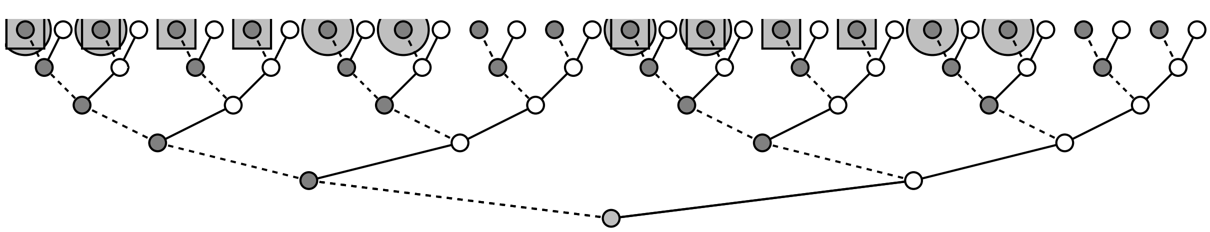
a) Kik vannak többen? Nagyapáim dédapjai vagy dédapáim nagyapjai?

b) Megegyezik-e a nagyapáim dédapjaiból álló halmaz a dédapáim nagyapjaiból álló halmazzal?

Megoldás

a) Mindenkinek két szülője, négy nagyszülője és nyolc dédszülője van. Ezek fele férfi, azaz egy apja, két nagyapja és négy dédapja van az embereknek. A két nagyapának összesen $2\times 4 = 8$ dédapja, a négy dédapának összesen $4\times 2 = 8$ nagyapja van. Tehát a kérdezett emberek ugyanannyian vannak.

b) Nem egyezik meg a két halmaz. Alább látható egy családfa, ahol a kis fehér karikák a nőket, a sötétszürkék a férfiakat jelölik. A nagyapák dédapjait halványszürke négyzet, a dédapák nagyapjait halványszürke nagy kör jelzi.



szmsz03 A kilenctagú $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan kilenctagú számsorozat „összegeként”, amelyek midnegyikében csak kétféle szám szerepel pl. $(0,2,2,0,0,2,2,0,0)$. A sorozatok összegét úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze. Pl.:

$$(1,1,0,0,1,0,0,0,1) + (0,2,2,0,0,2,2,0,0) = (1,3,2,0,1,2,2,0,1).$$

Megoldás: Lásd a Bergengóc példatár 102. feladatát.

2010.13. Egy papíron négyjegyű pozitív egész számok vannak felírva. Azt vettük észre, hogy a felírt számok közül azokban, amelyekben van kettes számjegy van nullás számjegy is.

a) A 2010, 1526, 1000, 1999 számok közül melyik lehet felírva?
b) Legfeljebb hány szám lehet a papíron?

Megoldás

a) 2010, 1000, 1999.

b) Ehhez a feladathoz túlzásnak tűnhet, de hasonló példák elemzésekor feltétlenül hasznos az alábbi típusú táblázat. A táblázat egyes mezőibe azon négyjegyű számok számát írjuk, amelyek rendelkeznek a mező oszlopának és sorának fejlécében olvasható tulajdonsággal. Az „Összesen” rovatokba pedig a megfelelő sorokban, illetve oszlopokban található számok összegét kell beírni.

A kitöltetlen táblázat

4-jegyű számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2			
Nincs benne 2			
Összesen			9000

A táblázat részleges kitöltése

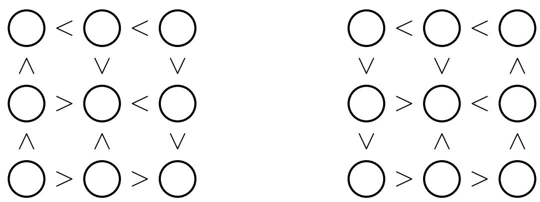
4-jegyű számok	Van benne 0	Nincs benne 0	Összesen
Van benne 2		$9^4 - 8^4$	
Nincs benne 2		8^4	
Összesen		9^4	9000

A papíron csak olyan számok nem lehetnek, amelyekben van 2-es, de nincs 0-s. Ezek számát a „Nincs benne 0” oszlopban alulról felfelé haladva határozhatjuk meg (jobb oldali táblázat). A feladat kérdésére a válasz: legfeljebb $9 \cdot 10^3 - 9^3 + 8^3 = 8783$ szám lehet a papíron.

Megjegyzés

Pataki János hívta fel rá a figyelmemet, hogy ez a táblázatos eljárás áttekinthetőbb a hasonló feladatokban használt Venn diagrammos módszernél.

sorrend01 Írjuk be a körökbe 1-től 9-ig az egész számokat úgy, hogy a kisebb-nagyobb jeleknek megfeleljenek!



Megoldás: Lásd a Bergengóc példatár 91. feladatát.

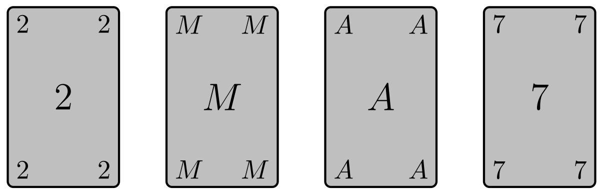
diof01 Két pozitív egész szám szorzata 1000-rel nagyobb az összegüknél. Melyek lehetnek ezek a számok?

Megoldás kezdemény: Az $xy = x + y + 1000$ egyenletből $xy + x + y + 1 = 1001$, azaz $(x+1)(y+1) = 1001\ldots$.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. február 9.

Villám20. Adjuk meg mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre $x + x \cdot y = 11$!

Villám21. Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van. Ezt látod az asztalon:



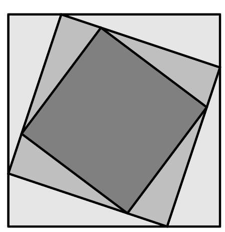
Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét?

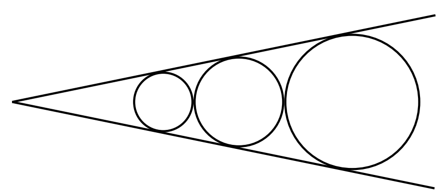
Előző órán volt, még nem beszéltük meg:

szmsz03. A kilenctagú $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ számsorozatot állítsuk elő minél kevesebb olyan kilenctagú számsorozat „összegeként”, amelyek midnegyikében csak kétféle szám szerepel pl. $(0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0)$. A sorozatok összegét úgy értelmezzük, hogy az azonos helyen álló számokat adjuk össze. Pl.:

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) + (0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0) = (1, 3, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1).$$

has01. Egy 64 cm^2 területű négyzet oldalainak negyedelőpontjait az ábra szerint összekötve egy kisebb négyzet kaptunk. Annak negyedelőpontjai egy még kisebb négyzetet alkotnak. Határozzuk meg ennek területét!





has02. Egy szög szárait érinti három kör, amelyek az ábra szerint egymást is érintik. Ha a legkisebb kör sugara 2 cm, a középsőé 3 cm, akkor mekkora lehet a legnagyobb kör sugara?

Órai feladatok

szamjegy02. Egy tetszőleges kétjegyű szám után írjunk egy 0-t majd újból a kétjegyű számot. Igaz-e, hogy az így kapott ötjegyű szám mindig osztható 13-mal?

szamjegy03. Határozzuk meg azon háromjegyű számok összegét, amelynek számjegyei különbözőek!

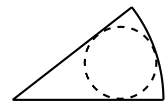
has03. Egy trapéz két alapja 3 és 7 cm hosszú, két átlója pedig 5 és 7 cm-es. Milyen hosszú részekre osztja a 7 cm-es átló az 5 cm-es átlót?

diof02. Melyik az a csupa különböző számjegyből álló, 0-s jegyet nem tartalmazó ötjegyű szám, amelyik egyenlő a számjegyeiből alkotható összes háromjegyű szám összegével (a háromjegyű számok jegyei is különbözőek)?

diof02.

Egy téglalap alakú sütemény széle megégett. A sütit az oldalaival párhuzamos – teljesen végig érő – vágásokkal kisebb darabokra vágtuk. Azt tapasztaltuk, hogy az égett – tehát a süti széléről származó – darabok száma megegyezik az égett részt nem tartalmazó – belső – szeletek számával. Hány részre vágtuk fel a süteményt?

has04. Adott egy körcikk. Szerkessz bele olyan kört, amely érinti a szárakat és a körívet is!



kombgeo01.
Adott öt pont a síkon. Megrajzoljuk mindegyik kettő felezőmerőlegesét.
a) Így hány egyenes jön létre?
b) Összesen hány metszéspontja van ezeknek a felezőmerőlegeseknek?

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. február 16.

Villám22. Egy sielő kiszámította, hogy ha 10 km-t tesz meg óránként, akkor déli 1 órakor ér célba, óránként 15 km-es sebességgel pedig délelőtt 11-kor.

Milyen sebességgel haladjon, hogy pontosan délben érkezzen a célba?

Villám23. Egy táncos estén négy fiú és négy lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: 3, 1, 2, 2. Megkérdeztük a fiúkat is, hogy hány lánnyal táncoltak és a következő válaszokat adták: 2, 2, 3, 2. Mutassuk meg, hogy valaki nem az igazat mondta!

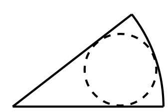
Előző órán volt, még nem beszéltük meg:

diof02. Melyik az a csupa különböző számjegyből álló, 0-s jegyet nem tartalmazó ötjegyű szám, amelyik egyenlő a számjegyeiből alkotható összes háromjegyű szám összegével (a háromjegyű számok jegyei is különbözőek)?

diof03.

Egy téglalap alakú sütemény széle megégett. A sütit az oldalaival párhuzamos – teljesen végig érő – vágásokkal kisebb darabokra vágtuk. Azt tapasztaltuk, hogy az égett – tehát a süti széléről származó – darabok száma megegyezik az égett részt nem tartalmazó – belső – szeletek számával. Hány részre vágtuk fel a süteményt?

has04. Adott egy körcikk. Szerkessz bele olyan kört, amely érinti a szárakat és a körívet is!



Órai feladatok

kombgeo01.

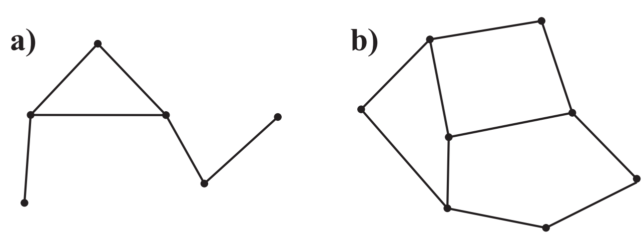
Adott öt pont a síkon. Megrajzoljuk mindegyik kettő felezőmerőlegesét.

a) Így hány egyenes jön létre?

b) Összesen hány metszéspontja van ezeknek a felezőmerőlegeseknek?

graf10. Az alábbi ábrán néhány községet és a köztük futó utakat tüntettük fel sematikusan. Tudjuk, hogy a vidéken két buszjárat közlekedik, melyek rendre az alábbi községeket keresik fel:

I. járat: C, E, F, B, II. járat: F, C, A, D.



Az állomások az egyes járatokon a feltüntetett sorrendben következnek. Jelöljük be a térképen (külön **a)**-n, illetve **b)**-n) az A-nak megfelelő községet!

has05. Egy trapéz alapjai 7 és 11 cm, szárai 6 és 9 cm-esek.

a) Szerkesszük meg a trapézt!

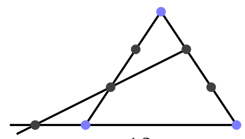
b) Milyen hosszú részekre vágja a szárak 11 cm-es alap felőli harmadolópontjait a trapéz két átlója?

graf11. Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők közt. Az első 13 válaszoló közül öten mondtak hármat, nyolcan négyet. Vajon hány osztálytársa volt jelen a többi gyereknek, ha azt tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa?

has06. Egy trapézt két átlója négy részre oszt. A négy rész közül az egyik alap melletti rész területe 4 cm^2, az egyik szár melletti részé pedig 6 cm^2. Meghatározható-e ezekből az adatokból a másik két rész területe?

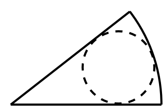
8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. február 23.

Villám24. Egy 12 cm alapú egyenlő szárú háromszög két szárát három-három egyenlő részre osztjuk. Mekkora darabot vág le a az alap meghosszabbításából egy felső és egy alsó osztópontot összekötő egyenes?



Előző órán volt, még nem beszéltük meg:

has04. Adott egy körcikk. Szerkessz bele olyan kört, amely érinti a szárakat és a körívet is!



kombgeo01.
Adott öt pont a síkon. Megrajzoljuk mindegyik kettő felezőmerőlegesét.
a) Így hány egyenes jön létre?
b) Összesen hány metszéspontja van ezeknek a felezőmerőlegeseknek?

has05. Egy trapéz alapjai 7 és 11 cm, szárai 6 és 9 cm-esek.
a) Szerkesszük meg a trapézt!
b) Milyen hosszú részekre vágja a szárak 11 cm-es alap felőli harmadolópontjait a trapéz két átlója?

has06. Egy trapézt két átlója négy részre oszt. A négy rész közül az egyik alap melletti rész területe 4 cm^2, az egyik szár melletti részé pedig 6 cm^2. Meghatározható-e ezekből az adatokból a másik két rész területe?

Órai feladatok

kombgeo02. Legfeljebb hány új egyenes jöhet létre, ha hat egyenes metszéspontjait összekötjük egymással?

graf11. Van-e olyan tíztagú társaság, amelyben az embereknek rendre
a) $4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$;
b) $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;
c) $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2$;
d) $9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 4, 4$
ismerőse van? (Az ismerettséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

has07. Az ABC háromszög oldalainak hossza cm-ben: $AB = 25$, $BC = 20$, $CA = 15$, míg az AB oldalhoz tartozó magasság 12 cm. Határozzuk meg annak a négyzetnek az oldalát, amelynek egyik oldala az AB szakaszra illeszkedik, míg másik két csúcsa a BC illetve az AC oldalon van!

sakk01. Legfeljebb hány
a) bástya; **b)** futó
helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást?

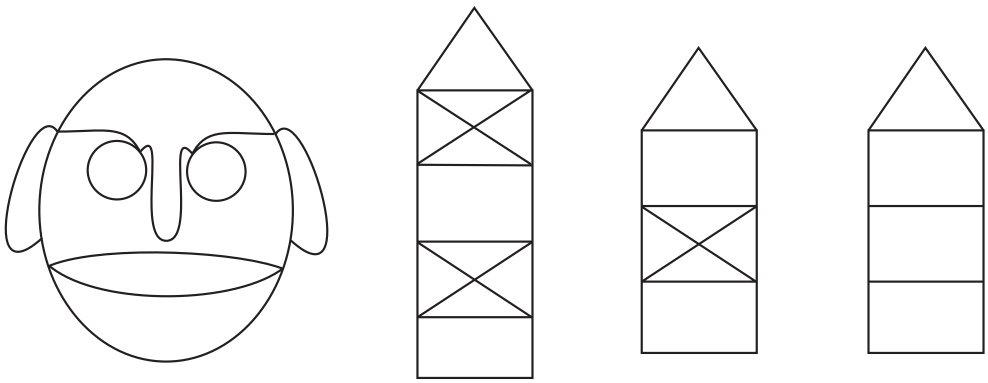
sakk02. Egy sakktábla két sarkát levágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 62 mező 31 db 2×1-es dominólappal?

graf12. a) Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.
b) Igaz marad-e az állítás akkor is, ha megengedjük, hogy két ember többször is mérkőzzön egymással?

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. március 2.

Figyelem A március 9-ei szakkör elmarad. Aznap 16.00-tól Laczkovich Miklós tart előadást „Racionális távolságok” címmel. Az előadás beharangozója a http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/lm0309.html weboldalon olvasható. Helyszín: a 213. terem (Fizika előadó).

Villám25. Rajzoljuk le az alábbi ábrán látható figurákat a ceruza felemelése nélkül! Minden vonalon csak egyszer szabad haladni, de már megrajzolt vonalat keresztezni szabad.



Előző órán volt, még nem beszéltük meg:

sakk01. Legfeljebb hány
a) bástya; **b)** futó
helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást?

sakk02. Egy sakktábla két sarkát levágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 62 mező 31 db 2×1-es dominólappal?

kombgeo01.
Adott öt pont a síkon. Megrajzoljuk mindegyik kettő felezőmerőlegesét.
a) Így hány egyenes jön létre?
b) Összesen hány metszéspontja van ezeknek a felezőmerőlegeseknek?

Órai feladatok

has07. Az ABC háromszög oldalainak hossza cm-ben: $AB = 25$, $BC = 20$, $CA = 15$, míg az AB oldalhoz tartozó magasság 12 cm. Határozzuk meg annak a négyzetnek az oldalát, amelynek egyik oldala az AB szakaszra illeszkedik, míg másik két csúcsa a BC illetve az AC oldalon van!

graf12. a) Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.
b) Igaz marad-e az állítás akkor is, ha megengedjük, hogy két ember többször is mérkőzzön egymással?

sakk03. Helyezzünk el minél kevesebb vezért a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást, de ne lehessen elhelyezni még egy további bábut úgy, hogy egyik se üsse azt!

sakk04. Legfeljebb hány
a) huszár; **b)** vezér
helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást?

graf13. Egy társaságban öt házaspár van jelen. Azok, akik nem ismerik egymást, bemutatkozásul kezet fognak egymással. Kovács úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? És Kovács úr?

szerk10. Adott a síkon két pont, A és B. Szerkesztendő az AB szakasz A-hoz legközelebbi ötödölőpontja.

szerk11. Adott a síkon két pont, A és B. Szerkesztendő szakasz, melynek hossza

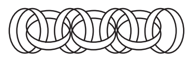
a) $\sqrt{2}\,\overline{AB}$, **b)** $\sqrt{3}\,\overline{AB}$, **c)** $\sqrt{11}\,\overline{AB}$, **d)** $\sqrt[4]{2}\,\overline{AB}$.

szerk12. Adott a síkon két pont, P és Q. Szerkesztendő egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek kerülete $\overline{PQ}$.

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. április 13.

Órai feladatok

lanc01. Egy vendégfogadóshoz egyszer beállított egy vándor. Pénze nem volt, de felajánlotta a vendégfogadósnak, hogy hét szemből álló ezüstláncából minden nap átad egy szemet, amíg csak ott marad a fogadóban. Legalább hány szemet kell a láncból elfűrészelni ahhoz, hogy a vándor egy héten keresztül minden nap el tudjon számolni ilyen módon a fogadóssal? (Szabad visszakérni is az előzőleg adott láncszemeket, s egy hosszabb láncot adni helyette fizetségül.)



alg30. Egy 3×3-as táblázatban elhelyeztünk 9 számot. Egy ilyen táblázatot bűvös négyzetnek nevezünk, ha a számok összege minden sorban, minden oszlopban és mindkét főátlóban ugyanaz az érték. Bizonyítsuk be, hogy a bűvös négyzet fölső sorában álló számok négyzetének összege megegyezik az alsó sorban álló számok négyzetösszegével!

lanc02. Ha egy n szemből álló láncban

a) 2, **b)** 5

szemet vághatunk el, akkor mely n-re lehet 1-től n-ig minden láncszemnyi összeget kifizetni?

graf20. A Bergengóc Közlekedési Minisztérium takaréskoskodik. A lehető legkevesebb ingajárattal szeretné megoldani, hogy 10 legnagyobb városából a 10 közül bármelyik másikba el lehessen jutni, ha szükséges átszállásokkal. Adjuk meg az ingajáratok minimális számát! (Ingajárat: két város közti összeköttetés)

8-os tehetséggondozó szakkör, 2010. május 18.

Órai feladatok

Fib02. JOKER
Fogalmazz meg sejtést a Fibonacci sorozattal kapcsolatban és add fel társaidnak bizonyításra!
Emlékeztető: $F_1 = F_2 = 1$ és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, ha $n \geq 1$.

Has20. Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AF_A súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$.

Ter20. A Nagy Szerkesztő feljegyzései között találtam a következőt:

„Ügyes módszert találtam ki, hogyan lehet megszerkeszteni egy tetszőleges háromszög kerületének bármely pontján át a háromszög területét felező egyenest. A szerkesztés menete a következő:"

Sajnos a következő oldalra ráborult a tintásüveg, így olvashatatlanná vált. Találjuk ki mi lehetett a módszer!

Skat10. Pistikének 100 korongja volt, rajtuk a számok 1-től 100-ig, mindegyiken egy-egy. Ki szeretne tenni négyet úgy, hogy az első kettő összege megegyezzen a másik kettőével. (Például így: $1+5=4+2$.) Sajnos, 75 korongot elvesztett. Megoldható-e a feladat a maradék 25 koronggal?

Skat11. Bálint kijelöl egy rácspontot négyzethálós papírján, majd megkérdi húgát:
– Milyen színre színezzem, Piroska?
– Pirosra! – feleli a lány.
Ezután Bálint új pontokat tűz ki. Minden pont után Piroska dönti el, kék legyen vagy piros. Kaphat-e Bálint olyan
a) szabályos háromszöget **b)** 1 cm oldalú szabályos háromszöget,
amelynek három csúcsa azonos színű, ha ezt Piroska nem akarja?

graf20. A Bergengóc Közlekedési Minisztérium takaréskoskodik. A lehető legkevesebb ingajárattal szeretné megoldani, hogy 10 legnagyobb városából a 10 közül bármelyik másikba el lehessen jutni, ha szükséges átszállásokkal. Adjuk meg az ingajáratok minimális számát! (Ingajárat: két város közti összeköttetés.)

graf21. A Bergengóc Közlekedési Minisztérium most úgy szeretné megoldani a légiközlekedést legnagyobb városai között, hogy minden városból legfeljebb három másikba menjen repülőjárat (ingajárat) és minden városból minden másikba el lehessen jutni legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány város között oldható meg így a légiközlekedés? (Ingajárat: két város közti összeköttetés.)